**Практическая работа № 9**

**«**Решениедвойственной задачи линейного программирования**»**

**Цель работы:** научиться составлять двойственную задачу и решать ее .

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

знать:

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

**1 Составление двойственной задачи**

Пусть задача линейного программирования задана в стандартном виде:

 ⇔  (1)

или

 ⇔  (2)

*Двойственная задача* составляется по следующим правилам:

- каждому ограничению (кроме условия неотрицательности переменных) ставится в соответствие переменная *yi (i=1,2,…,m);*

- матрицей коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированная матрица исходной; вектор-столбец свободных членов исходной задачи становится вектор-строкой коэффициентов целевой функции;

- неравенства в системах ограничений имеют противоположный смысл;

- вектор-строка исходной целевой функции становится вектор-столбцом свободных членов в системе ограничений двойственной задачи;

- целевая функция двойственной задачи определяется противоположным по сравнению с целевой функции исходной задачи образом, т.е. если **,** то , и наоборот.

Таким образом, двойственная к (1) задача имеет вид

 или 

Двойственная к (2), соответственно:

 или 

*Замечание.* Если в одной из задач ограничение, соответствующее новой переменной, представляет собой равенство, то с этой переменной снимается условие неотрицательности.

Пример 1. Записать задачу, двойственную к заданной:

|  |  |
| --- | --- |
| **а)** | **б)** |

Решение.В случае а) все ограничения – неравенства. Приведем задачу к симметричному виду (функция стремится к максимуму, значит, все ограничения, кроме условия неотрицательности, должны иметь вид «**≤**»). Чтобы этого добиться, поменяем знак во втором неравенстве. Затем введем новые переменные *yi (i=1,2,3).*

****

****

Учитывая правила построения двойственной задачи, получим:

****

****

Для задачи б) меняем знак неравенства во втором ограничении, а также, после введения новых переменных, учитываем, что первое и третье ограничения – равенства, поэтому для соответствующих переменных требования неотрицательности не будет. Будем иметь:

|  |  |
| --- | --- |
| Исходная задача | Двойственная задача |
|  |  |

**2. Первая теорема двойственности**

Формулировка утверждения звучит следующим образом: *если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают. Если одна из пары двойственных задач не имеет решения в силу неограниченности целевой функции, то вторая не имеет решения в силу несовместности системы ограничений.*

При использовании этого утверждения симплекс-методом сначала находится оптимальное решение одной из задач, а затем – оптимальное решение второй задачи с помощью правила, которое выводится в ходе доказательства теоремы. В частности, если *X\** - оптимальное решение исходной задачи, то *Y\*=C\*D-1*, где *C\** - вектор-строка коэффициентов целевой функции, соответствующих базисным переменным оптимального решения, а *D-1* –матрица, обратная к матрице *D*, составленной из столбцов матрицы ограничений исходной задачи (матрицы, с которой начиналась реализация симплекс-метода), соответствующих базисным переменным.

Пример 2. Записать задачу, двойственную к



решить исходную задачу симплекс-методом и выписать оптимальное решение двойственной задачи:

Решение. Оба ограничения заданы равенствами (нет требования неотрицательности новых переменных), поэтому двойственная задача имеет вид:



Исходная задача решена симплекс-методом в п.3.1: *Xоптим=(2;0;1;0)*. Базисные переменные здесь *x1, x3*, поэтому *C\*=(5;3), * и легко проверить, что *.* Тогда *.* При этом, как и следует из первой теоремы двойственности,

*Fmin=F(5;-2)=13=fmax=f(2;0;1;0).* (3)

Можно проверить, например, графическим способом, что действительно найдено оптимальное решение двойственной задачи.

**3. Вторая теорема двойственности**

Один из способов совместного решения пары двойственных задач основан на следующем утверждении: *если в оптимальном решении одной из двойственных задач одна из переменных отлична от нуля, то соответствующее ей ограничение второй задачи обращается в равенство; если оптимальное решение обращает ограничение одной из задач в строгое неравенство, то соответствующая переменная в оптимальном плане второй задачи равна нулю.*

Рассмотрим пару двойственных задач, разобранную в примере 2. Предположим, что нам известно решение второй задачи, т.е. *.* Здесь оба значения переменных в оптимальном плане не равны нулю, значит, ограничения первой задачи должны выполняться как равенства. Теперь будем поочередно подставлять ** в ограничения второй задачи: *15-10=5*; *10-6=4>-1;* поэтому *x2=0; 5-2=3*; *5-4=-1>-2,* поэтому *x4=0.* Учитывая, что *x2=0* и *x4=0*, из ограничений-равенств первой задачи получаем систему уравнений: . Решив ее, например, методом исключения переменной, получаем: *x1=2* и *x3=1.*

Таким образом, *Xоптим=(2;0;1;0)*, причем, в силу первой теоремы двойственности, снова выполняется (3).

**Задания для практического занятия:**

1. Записать задачу, двойственную к задаче из практической работы №7 (задание 1) и найти решение двойственной задачи, используя первую теорему двойственности.
2. Решить двойственную задачу графически или симплекс методом и найти решение исходной задачи с помощью второй теоремы двойственности.

**Контрольные вопросы**

1.В чем экономический смысл двойственной задачи.

2.Основные правила составления двойственной задачи.

3.Необходимость составления двойственной задачи.